UMA ABORDAGEM TEÓRICA E PRÁTICA DA COLORAÇÃO EM PROBLEMAS MODELADOS POR GRAFOS

C. B. SILVA[1], M. E. SENA[2], C. M. S. MACHADO[3], D. F. ADAMATTI[4]

RESUMO

Este artigo tem por objetivo uma revisão teórica sobre grafos planares e coloração de grafos. Além da importância do tema no contexto das aplicações do mundo real, ele pode também servir para a produção de ferramentas computacionais no ensino de matemática. Relata-se sobre a importância de trabalhar esta parte da matemática na educação básica a fim de promover raciocínio estratégico e tratamento da informação, bem como da importância da utilização de algoritmos como recurso pedagógico facilitador e favorecedor da aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVES: TEOREMA DAS QUATRO CORES. ENSINO. MATEMÁTICA.

PLANARITY OF GRAPHS, THE FOUR COLOR THEOREM AND THE TEACHING OF MATHEMATICS

ABSTRACT

This article aims at a theoretical review on planar graphs and graph coloring. In addition to the importance of the issue in the context of real-world applications, it can also serve for the production of computational tools in mathematics education. It is reported on the importance of working this part of mathematics in basic education in order to promote strategic thinking and processing information, as well as the importance of using algorithms as a teaching resource and facilitator to favor learning.

KEY-WORDS: THE FOUR COLOR THEOREM. TEACHING. MATH.

1. INTRODUÇÃO

[1]Instituto de Matemática, Estatística e Física - FURG. Licenciada em Matemática. Email: camila.bragaesilva@yahoo.com.br
[2]Instituto de Matemática, Estatística e Física - FURG. Licenciada em Matemática. Email: elenicesena52@yahoo.com.br
[3]Instituto de Matemática, Estatística e Física - FURG. Doutora em Engenharia de Produção. Email: catiamachado.furg@gmail.com
[4]Centro de Ciências Computacionais - FURG. Doutora em Engenharia Elétrica. Email: dianaada@gmail.com

O objetivo deste trabalho é mostrar alguns princípios de Matemática Discreta que são utilizados na resolução de problemas envolvendo coloração e planaridade de grafos. A ideia de grafo planar surgiu da necessidade dos cartógrafos em colorir mapas com diversas cores com o intuito de distinguir as diferentes regiões. Uma questão que suscitava era a respeito do menor número de cores necessárias para colorir um mapa. Essa questão era notoriamente difícil e permaneceu sem solução por cerca de um século. Esse problema é conhecido como o *problema das quatro cores de um mapa* e a princípio a coloração parece ter pouco valor, no entanto esse problema é importante para a resolução de outros problemas de mesma natureza. A partir do Teorema das Quatro Cores, sua demonstração, proposições, corolários é possível mostrar as ideias básicas que permeiam os processos algorítmicos necessários na resolução de problemas combinatoriais. Dentro da Teoria dos Grafos, o estudo de algoritmos é uma ótima oportunidade, para contribuir com a compreensão do estudante de como o conhecimento matemático, aliado à tecnologia, tem lidado com problemas importantes do mundo real. Seguindo na mesma ideia e motivados pelo trabalho de Júnior [4], serão apresentadas duas atividades de modo a articular a Matemática ensinada na educação básica com temas atuais da ciência e tecnologia a fim de que o estudante enxergue o benefício do aprendizado. De que modo teoremas podem contribuir para que algoritmos sejam desenvolvidos de forma a solucionar um problema apresentado. Será mostrado que o algoritmo de coloração de grafos, trabalhado na educação básica, é um ótimo recurso pedagógico para compreensão de resultados matemáticos que são necessários na resolução de problemas combinatoriais. O problema de coloração está presente, por exemplo, nos problemas de escalonamento de horários em empresas e instituições de ensino, e embora seja um problema de fácil entendimento existe uma enorme complexidade de resolução.

2. RESULTADOS DA TEORIA DOS GRAFOS

O termo “grafo” não está totalmente padronizado, assim algumas definições são formalizadas para a demonstração dos teoremas apresentados.

- *Definição 1.* Um grafo é denotado por $G(V,E)$, onde V é o conjunto de vértices e *E* é um conjunto de pares de vértices – as arestas do grafo.

- *Definição 2.* Um subgrafo $G^{'}(V^{'},E^{'})$ é subgrafo de um grafo G se, e somente se, $V^{'} \subseteq V$; $E^{'} \subseteq E$.

- *Definição 3.* Um passeio em *G* é uma sequência de vértices, em que cada vértice é adjacente ao seguinte. O comprimento desse passeio é *n* com *n* + 1 vértices.

- *Definição 4.* Um caminho em um grafo G é um passeio em que nenhum vértice é repetido, denotado por P_n.

- *Definição 5.* Um ciclo em um grafo G é um caminho em que o vértice inicial e final coincidem, denotado por C_n, onde n é o número de vértices do ciclo.

- *Definição 6.* O grau de um vértice *v,* de um grafo G, é o número de arestas incidentes em *v.*

- *Definição 7. Um grafo* $G(V,E)$ é conexo se, e somente se cada par de vértices no grafo está ligado por um caminho, isto é, para todo *x, y* $\in V(G)$, existe um caminho de *x* até *y.*

- *Definição 8.* Um grafo completo, denotado por K_n é aquele em que todos os vértices são adjacentes entre si.

- *Definição 9.* Um grafo bipartido é um grafo G em que podemos dividir os vértices em dois conjuntos disjuntos, de forma que os vértices de um dos conjuntos une-se aos vértices do outro conjunto pelas arestas.

- *Definição 10.* O mergulho é definido como uma função que associa os vértices do grafo $G(V,E)$ a pontos do $\Re^2$ e associa as arestas do mesmo grafo a curvas suaves do plano que ligam as imagens dos vértices. Se ocorre que uma curva não cruza a si mesma ou outra curva, então temos um mergulho livre de cruzamentos.

- *Definição 11*. Um grafo planar segundo Netto [6], é definido como aquele que seu esquema puder ser traçado em um plano de modo que duas arestas quaisquer se toquem, no máximo, em alguma extremidade. Ou também como aquele que tem mergulho livre de cruzamentos. Um grafo planar é mostrado na FIGURA 1.

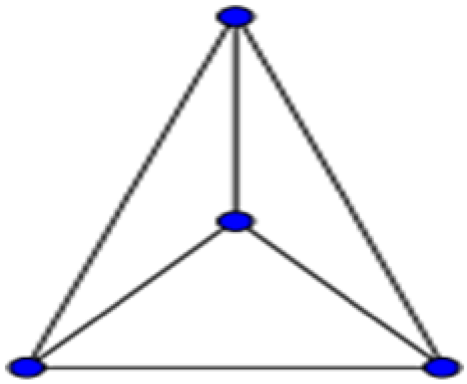

Figura 1: Grafo planar [9].

Pode-se associar um grafo a imagem de um poliedro. Dessa forma, os vértices e arestas do poliedro (grafo) delimitam regiões do plano, tais regiões são ditas faces e denotadas por f . Ainda pensando na perspectiva desta associação, um grafo é planar sempre que pode-se pegar uma das suas faces e esticar as arestas de forma que todo o grafo fique planificado dentro da mesma face que deformamos, sem que haja cruzamentos de arestas. A FIGURA 2 mostra um cubo e depois sua imagem planarizada.

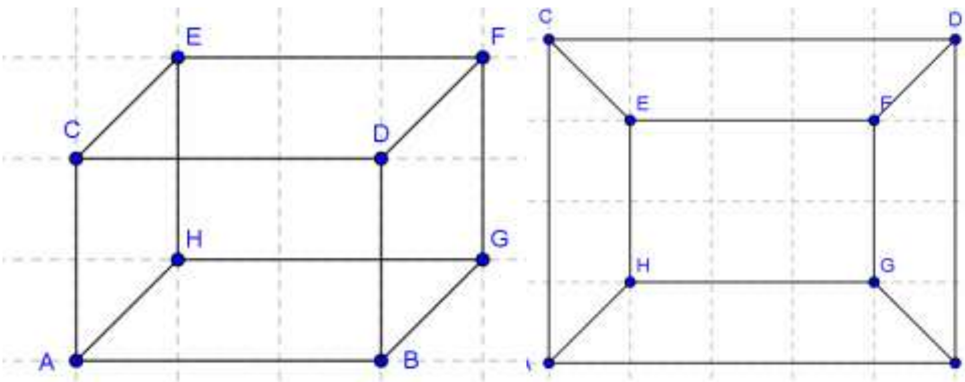

Figura 2: Imagem planarizada de um cubo

- *Definição 12.* Um grafo G é maximal planar se, se somente se, é aquele que podemos acrescentar arestas sem comprometer sua planaridade.

- *Definição 13.* O menor grau de um vértice em $G(V,E)$ é o grau mínimo, denotado $\delta(G)$, e o maior é o grau máximo, denotado $\Delta(G)$.

- *Definição 14.* Dado um grafo $G(V,E)$, a coloração é definida como uma função $f:G(V,E)$ tal que se $\{u,v\}\in E(G)$ então $f(u)\neq f(v)$.

O número de cores de uma coloração *f* é o tamanho da imagem de *f*, ou seja, $|f| = |f(V(G)|$. Para [4] $f:V(G)\rightarrow\{1,...,k\}$ é uma k-coloração própria e pode se representada por um número natural k.

O número cromático de um grafo G é denotado por $\chi(G)$, e representa o menor número de cores de uma coloração de G.

Proposição. Seja G um grafo com grau máximo Δ. Então, $\chi(G)\leq\Delta+1$.

Demonstração. Suponha que os vértices de G sejam $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ e que tenhamos uma palheta com $\Delta+1$ cores. Para começar, atribuímos qualquer cor da palheta ao vértice v_1, em seguida a v_2. Tomando cuidado para que a coloração seja própria. Se v_1 e v_2 são adjacentes então atribuímos a eles cores diferentes. Repetimos o procedimento para todos os vértices. Sempre podemos repetir uma vez que cada vértice possuí no máximo Δ vizinhos e temos $\Delta+1$ cores na palheta. Chamamos esta de uma $k+1$-coloração do grafo G.

Teorema 2 (Brooks 1941). Se G é um grafo conexo que não seja K_n e tal que $\Delta(G) \geq 3$, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Teorema 3. Um grafo G é bipartido se, e somente se, $\chi(G) = 2$.

Demonstração. Basta fazer corresponder cada uma das partições independentes de G a uma cor.

Teorema 4. Para grafos planares, vale a relação de Euler, já conhecida do estudo dos poliedros convexos, em um grafo planar conexo vale que $f - m + n = 2$.

Teorema 5. Num grafo planar conexo G vale $m \leq 3n - 6$; a igualdade vale se G é maximal planar.

Demonstração. Contando as arestas de cada face, contamos cada aresta do grafo duas vezes, como cada face tem no mínimo três arestas, no caso maximal, teremos que:

$2f \leq 2m$. Substituindo na formula de Euler, $3f - 3m + 3n = 6$. Temos que $2m - 3m + 3n \geq 6$ logo, $m \leq 3n - 6$.

Proposição 1. Seja G um grafo planar. A soma dos graus das faces em um mergulho de G sem cruzamentos no plano é igual a $2|E(G)|$.

Corolário 1. Se G é um grafo planar com menos de duas arestas logo, $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. Se G não contém K_3 como subgrafo, então $|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4$.

Demonstração. Primeiramente G é conexo. Se ele, por acaso não o for, podemos torná-lo conexo sem que ele perca sua planaridade. Se o grafo satisfaz que $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$ então o grafo que originou este com menos arestas satisfaz. Escolhendo um grafo que satisfaz a hipótese, escolhemos um mergulho sem cruzamentos com f faces. Por Euler $f = 2 - |V(G)| + |E(G)|$, a soma dos graus das faces do mergulho é $2|E(G)|$ e toda face tem grau 3, logo a soma é $3f$, assim $2|E(G)| \geq 3f$. Dessa forma $\frac{2}{3}|E(G)| \geq f$. Substituindo na formula da Euler temos $\frac{2}{3}|E(G)| \geq f = 2 - |V(G)| + |E(G)|$ logo $\frac{2}{3}|E(G)| \geq f = 2 - |V(G)| + \frac{1}{3}|E(G)|$.

Corolário 2. Seja G um grafo planar com grau mínimo δ. Então δ≤5.

Demonstração. Seja G um grafo planar. Se G tem menos de duas arestas então ele tem $\delta \leq 5$. Se ele tiver duas arestas ou mais, temos que pelo corolário 1 que

$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$. O grau mínimo δ não pode superar o grau médio denotamos por τ o grau médio em G. Logo $\delta \leq \tau'$. Temos, $\delta \leq \tau' = \frac{\sum \tau(v)}{|V(G)|} = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \frac{2(3|E(G)|-6)}{|V(G)|} = 6 - \frac{12}{|V(G)|} < 6$ e como δ é inteiro logo $\delta \leq 5$.

Teorema 6: (Quatro Cores.) Se $G(V,E)$ é um grafo planar, então pode ser colorido com 4 cores.

Segundo Souza [11], a demonstração do teorema das quatro cores demorou mais de um século para ser provado, sendo alcançada em 1976 e com o auxílio de 1200 horas de cálculos em computador. No entanto, mesmo com uma teoria rebuscada a demonstração é considerada falsa ou feia por muitos estudiosos uma vez que foi feita em computador. Em tentativa anterior Kempe utilizou uma técnica chamada Cadeias de Kempe apresentando uma demonstração em 1879. Após onze anos Heawood encontrou uma falha nesta demonstração de Kempe, mas ainda utilizou a mesma técnica para alcançar um resultado menos generalizado. Mesmo tendo sido demonstrado o Teorema, a complexidade dos cálculos dificulta a verificação dos mesmo em estudos posteriores. A dificuldade em verificar todos os cálculos feitos na demonstração de Apple e Haken tem sido um incentivo para alguns matemáticos tentarem encontrar uma prova mais simples. Em Agosto de 1994, no Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, Paul D. Seymour apresentou uma prova simplificada do Teorema das Quatro Cores, cuja formulação foi o resultado de trabalho conjunto com Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas. Eles também não conseguiram dispensar o uso do computador. Contudo foram capazes de reduzir a quantidade de cálculos para um nível bastante mais tolerável [8].

O fato é que uma demonstração sem a utilização do computador ainda não foi desenvolvida. Entretanto, existem dois resultados mais simples que são mostrados através do *Teorema 7* e do *Teorema 8.*

Teorema 7: (Seis Cores). Se G é um grafo planar, então $\chi(G) \leq 6$.

Demonstração. O teorema é obviamente verdadeiro para grafos que possuem seis ou menos vértices.

Supondo que o teorema seja válido para todos os grafos em n vértices. Seja G um grafo planar com $n+1$ vértices. G contém um vértice v, pelo corolário 2 G tem um vértice v com grau menor ou igual a cinco. Se $G' = G - v$, sendo G' planar com n vértices por isto é colorido com seis cores (hipótese). Analisando G vemos que v tem cinco outros vértices adjacentes, logo utilizaremos no máximo seis cores para colorir G, dessa forma $\chi(G) \leq 6$.

Teorema 8: (Cinco Cores). Se G é um grafo planar então $\chi(G) \leq 5$.

Demonstração. Em todo grafo planar existe um vértice com grau menor ou igual a 5. Considerando a vizinhança (conjunto de vértices adjacentes) de um vértice V denotada por $N(V)$, pode-se decompor o grafo retirando sempre um vértice de grau menor que 5 e recompô-lo colorindo, vértice a vértice. Desta forma, pode-se sempre supor que esta-se colorindo um vértice V de grau menor ou igual a 5. Se os vértices em $N(V)$ estão coloridas com menos do que 5 cores, basta colorir o vértice V. Então supondo que o vértice está cercado por 5 vértices coloridos cada um com uma cor do conjunto de cores $\{a,b,c,d,e\}$. Consideremos o subgrafo induzido pelos vértices coloridos com as cores a e c. Se a componente que contém o vértice de $N(V)$ colorido com a cor a não contiver o vértice colorido com a cor c, podemos trocar as cores desta componente: quem está colorido com a cor a fica colorido com c e vice-versa. Podemos então colorir o vértice V com a cor a. Se a componente que contém o vértice de $N(V)$, colorido com a, for o mesmo do vértice colorido com a cor c, existe um caminho de vértices que cerca o vértice B (veja FIGURA 3). Então, toma-se a componente do grafo induzido por vértices coloridos com b e d, que contém o vértice de $N(V)$ colorido com b. Depois de trocar as cores b e d nesta componente, pode-se colorir o vértice V com a cor b.

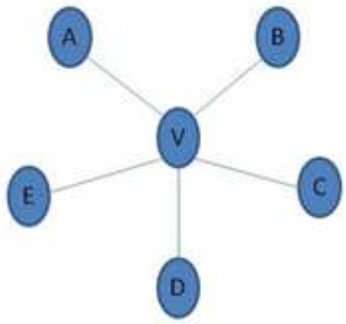

Figura 3

3. APLICABILIDADE DA PARTE TEÓRICA COM FOCO NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

São os conhecimentos teóricos, acerca da teoria dos grafos envolvida no estudo da coloração de vértices, que torna possível a elaboração de ferramentas de Matemática para a educação básica. Da parte teórica, sabe-se que um grafo planar pode ser colorido, com no máximo, quatro cores. Nesse sentido, utiliza-se o algoritmo de coloração, descrito abaixo, para resolver problemas que embora de natureza distinta, têm a mesma estrutura básica.

3.1 Algoritmo de coloração:

Entrada: Um grafo $G(V,E)$

Passo 1) Ordene os vértices do grafo G em ordem decrescente de grau.

Passo 2) Atribua a primeira cor, C_1, ao primeiro vértice e, então, sequencialmente, atribua C_1 a cada vértice que não seja adjacente a algum vértice que o antecedeu e ao qual foi atribuída a cor C_1.

Passo 3) Repita o passo 2 com a segunda cor C_2 e os vértices subsequentes não coloridos.

Passo 4) Repita o passo 3 com a terceira cor C_3, depois com a quarta cor C_4, e assim por diante, até que todos os vértices estejam coloridos (FIGURA 4).

Figura 4: Mapa colorido com quatro cores

O algoritmo descrito acima teve sua utilidade como recurso potencializador de ensino de Matemática com aplicação em problemas de natureza combinatória. Esse trabalho faz parte de um projeto que está sendo desenvolvido com estudantes do 1° ano do Ensino Médio na Escola Silva Gama, na cidade de Rio Grande. Fazem parte desse projeto estudantes do curso de Matemática Aplicada e do Mestrado em Modelagem Computacional da Universidade Federal do Rio Grande-FURG. O projeto também visa:

1) Incentivar os estudantes de nível médio, especialmente mulheres, para que estas ingressem nos cursos superiores em Ciências Exatas;

2) Buscar uma diminuição nos índices de evasão nos cursos das Ciências Exatas;

3) Contextualizar os problemas presentes em questões reais promovendo entendimento necessário a sociedade.

Dessa forma, foram selecionadas estudantes interessadas em ingressar na Universidade na área de Ciências Exatas e que possuíam afinidade com a Matemática. Trabalhar com a Teoria dos Grafos permite articular conteúdos da Matemática como: Matrizes, Geometria, Análise Combinatória, Funções, entre outros. À medida que o conteúdo de Teoria dos Grafos vai sendo desenvolvido é possível que se faça a correlação com os conteúdos matemáticos trabalhados na escola e com as aplicações cotidianas.

As atividades propostas no projeto utilizaram o algoritmo de coloração de grafos e estão descritas a seguir:

Primeira atividade: Escalonamento de horários.

O Coordenador do Curso de Matemática Aplicada pretende programar a época dos exames das 7 disciplinas da terceira fase do curso. As disciplinas são:

(C) – Cálculo II, (G) – Grafos, (L) – Álgebra Linear I,(N) – Algoritmo de Programação I, (P) – T. da Probabilidade, (S) – Física I, (T) – Optativa

Cada prova tem duração de três horas e os estudantes matriculados em cada uma das disciplinas estão representados na tabela abaixo:

Aluno	***Disciplinas***	***Aluno***	***Disciplinas***	***Aluno***	***Disciplinas***
Aldo	***C, L, T***	***Batista***	***C, G, S***	***Silvia***	***G, N***
Douglas	***C, L***	***Eduardo***	***L, N***	***Frederico***	***C, G***
Giovana	***N, P***	***Homero***	***G, L***	***Iracema***	***C, T***
Janete	***C, S, T***	***Laura***	***P, S***	***Maria***	***P, T***

Determinar o menor período de tempo necessário para a realização das provas finais.

Observação: O coordenador quer elaborar um esquema de exames finais com a condição de que, se um estudante está matriculado em duas disciplinas, essas disciplinas devem ter períodos de exames distintos.

Segunda atividade: Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, X usando o menor número de caixas. Alguns produtos não podem ser colocados numa mesma caixa porque reagem. Os produtos A, B, C, X reagem dois-a-dois; O produto A reage com F e com D e vice-versa; O produto E também reage com F e com D e vice-versa. Mostre o grafo que modela essa situação e use esse grafo para descobrir o menor número de caixas necessárias para embarcar os produtos com segurança.

Inicialmente se trabalhou com a modelagem do problema. A partir da simples ideia de pontos interligados por linhas, o problema foi sendo modelado por meio de um grafo e as definições apresentadas foram sendo exploradas. A resolução para o problema exigiu a utilização de um algoritmo e o estudante foi capaz de perceber o quão importante é desenvolver o pensamento algorítmico para resolução de problemas de natureza combinatória. A D*efinição 14* resgatou o importante conceito de função e o algoritmo de coloração pode ser apresentado. O algoritmo de coloração mostrou ser uma ferramenta importante no processo ensino-aprendizagem na medida em que os Teoremas 6,7 e 8 foram explorados.

Para Júnior [4] é necessário que a matemática ensinada contemple o estudo de ferramentas, que propiciem o desenvolvimento de novas habilidades necessárias à compreensão, análise e utilização de processos algorítmicos. É necessário aprender Matemática para entender a tecnologia e vice e versa.

É observado através de pesquisas que desenvolver aplicações com objetivos pedagógicos vem ganhando considerável importância nos últimos tempos. O conceito de ensino vem sofrendo mudanças e com isso cresce a necessidade de criar ferramentas mais atrativas para o ensino. As dificuldades encontradas ao oferecer novos conceitos para os estudantes revela a importância do aperfeiçoamento, na modelagem ou na resolução de problemas, a Teoria dos Grafos é uma importante ferramenta matemática com aplicação em várias áreas do conhecimento. Dessa forma, PCN/SEF/ME [7] destaca que a matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais cidadãos devem se apropriar. A matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização de seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente.

Segundo Costa [1] incluir conceitos da Matemática Discreta [10] nos Ensino Fundamental e Médio traz resultados satisfatórios, pois favorece o raciocínio, motiva a construção de estratégias para a busca da solução, viabiliza um enfoque interdisciplinar em várias abordagens e principalmente causa interesse ao aluno já que, em função do público alvo que se pretende atingir, várias aplicações práticas distintas podem ser estabelecidas.

Destacamos o que Jelinek [3] coloca com grande clareza que para o indivíduo conhecer-se a si próprio, primeiramente, e aos outros, depois ele precisa estar em contraste com uma contínua comparação, resultante da discussão, da oposição e do controle mútuo, que um procedimento que o coloca, continuamente, rente à necessidade de fazer uma opção, como o trabalho diversificado livre, onde os seus desejos entram em choque com a limitação de possibilidades impostas pelos materiais e espaço oferecidos e pelos desejos dos outros.

Alguns trabalhos aplicando a teoria dos grafos já vêm sendo desenvolvido nas escolas, nessa perspectiva Dall'Asta; Gautério; Pereira [2] enfatizam que sendo a Teoria de Grafos uma ferramenta acessível, a maior vantagem de seu uso em atividades práticas do cotidiano, em especial na resolução de problemas, parece estar completamente dissociado da realidade do aluno do Ensino Fundamental e Médio, pois não aparece nos livros texto utilizados pelos professores em sala de aula, excluindo-se desta forma um saber matemático desafiante ao estudante.

Além disso, os resultados mostraram que os estudantes ficaram motivados em realizar as atividades, pois as mesmas apresentavam situações cotidianas e, com isso, sentiam-se desafiados e entusiasmados a concluírem cada atividade proposta. O grupo de pesquisadores envolvidos neste trabalho discute a possibilidade da aplicação da Teoria de Grafos no Ensino Fundamental e Médio com o objetivo de desenvolver habilidades e competências importantes e necessárias a todas as áreas do conhecimento. Sendo assim, o desejo constante por otimização, uso de métodos matemáticos para resolver problemas e orientação a aplicações. Aprimorar o raciocínio lógico, sugerir soluções inovadoras para problemas comuns à sociedade contemporânea é ensinar uma matemática que têm uma razão de ser. O tipo de conhecimento desenvolvido neste projeto é imprescindível para uma geração que inexoravelmente tem (e terá) de usar o computador, minimizar custos e maximizar recursos cada vez mais escassos [5].

Não obstante, Machado [5] destaca que existe um grande potencial de disseminação deste projeto em outras instituições de ensino, tanto em nível médio como em nível superior, o que será de grande valia, uma vez que contribuirá em muito para o desenvolvimento do raciocínio estratégico por parte dos estudantes envolvidos.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, destaca-se como recurso educacional de qualidade e utilidade, a Introdução à Teoria dos Grafos na educação básica a fim de articulação com outros conhecimentos teóricos matemáticos. As atividades desenvolvidas a partir da modelagem dos problemas e da resolução com a utilização do algoritmo de coloração tornou o estudo mais interessante, atraente e eficaz. Além disso, é fundamental promover o desenvolvimento do pensamento algorítmico, atualmente necessário e pouco presente nas principais estratégias de ensino utilizadas em qualquer nível educacional.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] JÚNIOR, I. M. **Grafos e algoritmos: conceitos, aplicações e experiências no ensino médio**. Rio de Janeiro, Brasil, MPECM-CEFET/RJ.

[2] NETTO, P. O. B. **Grafos: teoria, modelos e algoritmos**. São Paulo, Brasil, E. Blucher; 2003.

[3] RABUSKE, M. A. **Introdução a teoria dos grafos**. Florianópolis, Brasil, Ed. UFSC; 1992.

[4] SCHEINERMAN, E. R. **Matemática Discreta: uma introdução**. São Paulo, Brasil, Cengage Learning; 2009.

[5] SOUSA, L. **O teorema das quatro cores**. Disponível em: http://www.ipv.pt/millenium/Millenium24/12.pdf em 5 de setembro de 2014.

[6] PIMENTA, M. M. D. **História do problema das quatro cores**. Disponível em: www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/sMatematica/article/.../1154 em 10 de setembro de 2014.

[7] Parâmetros Curriculares Nacionais/ Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. – 3ª Ed. Brasília: A secretaria, 2001.

[8] COSTA, C. S. **Matemática discreta no ensino médio – um trabalho com grafos Eulerianos**. Disponível em: http://www.producao.uff.br/conteudo/rpep/volume132013/RelPesq_V13_2013_B02.pdf em 5 de setembro de 2014.

[9] JELINEK, K. R. **Jogos nas aulas de matemática: brincadeira ou aprendizagem? O que pensam os professores?** Disponível em: http://tede.pucrs.br/tde_arquivos/24/TDE-2007-05-11T130448Z-573/Publico/332635.pdf em 10 de setembro de 2014.

[10] DALL'ASTA, M. N, GAUTÉRIO, E. G, PEREIRA, E. C. **Aplicações Cotidianas no Ensino Fundamental sob um olhar da Teoria de Grafos**. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/udescemacao/article/view/2236/pdf_71 em 11 de setembro de 2014.

[11] MACHADO, C. M. **Uma Integração da Pesquisa Operacional no Ensino do Ciclo Básico e Profissional**. Projeto aprovado pelo CNPQ/Brasília/DF/Brasil.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o suporte financeiro, Chamada Pública MCTI/CNPq/SPM-PR/Petrobras nº 18/2013, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, a Universidade Federal do Rio Grande – FURG.