

ANÁLISE DIMENSIONAL E APLICAÇÃO HIDRÁULICA DO TEOREMA PI DE BUCKINGHAM

GEAN HENRIQUE SABINO FREITAS¹, FLAVIO SANTANA MICHELS², WILSON ESPINDOLA PASSOS³

RESUMO

A identificação de parâmetros adimensionais não depende necessariamente da análise e aplicação formalizada, porém a determinação destes conhecimentos é essencial na determinação de parâmetros coerentes ao escoamento em análise, sem uma exata compreensão da enorme complexidade dos fenômenos, mesmo necessitando de uma boa compreensão da mecânica dos fluidos. Quando esses dados podem ser aplicados corriqueiramente, torna-se uma ferramenta indispensável na hidráulica, por exemplo. Em bombas centrífugas, experimentações de grande exatidão proporcionam os parâmetros necessários para a posterior caracterização em uma curva e ainda, originar dados genéricos, dependentes das propriedades do escoamento inseridas em Π , responsáveis por originarem a linha de tendência. O procedimento realizado a seguir, inicia-se na escolha das variáveis dependentes, e prossegue-se no estabelecimento de parâmetros adimensionais das mesmas e, ao efetuar a correlação entre os grupos adimensionais, são convertidos os dados em uma linha de tendência, e com isso permite-se realizar vários testes para a variável em estudo. Representando graficamente os valores por meio de recursos computacionais, a observação e a análise física transformam-se em uma tarefa mais simples, que abrange mais o estudo do caso inserido do que propriamente o teste de corpos nas infundáveis condições.

PALAVRAS-CHAVES: PARÂMETROS PI. CONSTANTES ADIMENSIONAIS. MECÂNICA DOS FLUIDOS. BOMBAS CENTRÍFUGAS.

DIMENSIONAL ANALYSIS AND HYDRAULIC APPLICATION OF THEOREM BUCKINGHAM PI

ABSTRACT

The identification of dimensionless parameters not necessarily depends on the analysis and formalized application, however the determination of such knowledge is essential in the parameter determination consistent the flow in analysis without an exact understanding of the phenomena complexity, even needing good understanding of fluids mechanics. When processes data can be applied routinely, a tool it is indispensable in hydraulics, for example. in centrifugal pumps, great accuracy trials provide the necessary parameters

¹Engenharia Civil, Centro Universitário da Grande Dourados (UNIGRAN);

e-mail: gean.henri@hotmail.com

²Doutorando em Ciência e Tecnologia Ambiental, Universidade Federal da Grande Dourados;

e-mail: santanamichels@gmail.com

³Professor, Departamento de Engenharia, Centro Universitário da Grande Dourados;

e-mail: w.v.rock@hotmail.com

for a subsequent characterization in a curve and further give generic data dependents of properties to flow inserted in responsible by yielding one line trend. The procedure performed starts in the choice of the dependent variables, and continues on the dimensionless parameters establishment of the same and, it places a correlation between the dimensionless groups, converting the data into a line of trend, which it allows if perform various tests for a variable in the study. By graphing of the values through computational resources, the observation and physical analysis become a simpler task, that covers more the study of the inserted case than properly the test of bodies in the endless conditions.

KEY WORDS: PI PARAMETERS. DIMENSIONAL CONSTANTS. FLUID MECHANICS. CENTRIFUGAL PUMPS.

1. INTRODUÇÃO

Números adimensionais são comumente utilizados na Engenharia, como o número de Mach ou o número de Reynolds, prevendo características condicionais de escoamento, compressibilidade ou incompressibilidade e, as consequências dos efeitos viscosos [19]. Tais coeficientes adimensionais preveem possibilidades de cálculos de acordo a maior aproximação e simplificação possível da realidade. A obtenção desses coeficientes, para relacioná-los de modo próximo ao da realidade será o tema em abordagem, realizando uma dedução do Teorema Pi de Buckingham, e analisando os principais grupos adimensionais. Posteriormente, serão estudadas as propriedades de uma bomba centrífuga aplicando estes coeficientes [20].

Inicia-se para tal objetivo, a dedução adimensional das equações diferenciais básicas. Ao considerar as hipóteses de um escoamento em regime permanente, incompressível, de viscosidade constante e em duas dimensões.

As equações de Navier-Stokes são abreviadamente:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \rho g - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

Dividindo os termos dimensionais pelas respectivas unidades, ou seja, x e y por L , u e v por V_∞ e P por ρV_∞^2 (pressão da corrente livre), as resultantes são os termos com asteriscos, denotados como adimensionais e, as relações dos dimensionais com estes são $x = x^* L$, $u = u^* V_\infty$. De imediato, tornando adimensionais as equações

diferenciais básicas, tem-se primeiramente para os termos da equação diferencial da conservação de massa [9]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{V_{\infty}}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V_{\infty}}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*}$$

assim:

$$\frac{V_{\infty}}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V_{\infty}}{L} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (1)$$

e para as equações de Navier-Stokes:

$$\frac{\rho V_{\infty}^2}{L} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\rho V_{\infty}^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\mu V_{\infty}}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\rho V_{\infty}^2}{L} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\rho g - \frac{\rho V_{\infty}^2}{L} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{\mu V_{\infty}}{L^2} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (4)$$

Dividindo a Equação (1) por V_{∞}/L e as Equações (2) e (3) por $\rho V_{\infty}^2/L$, tem-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho V_{\infty} L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{gL}{V_{\infty}^2} - \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{\mu}{\rho V_{\infty} L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

Partindo de equações básicas, é possível deduzir parâmetros adimensionais, como o número Weber [22]. Isso tem como propósito ideal, o de analisar e identificar termos importantes capazes de caracterizar o fenômeno, mesmo sendo nebuloso relacioná-los no caso em questão. Tais análises são fundamentais no instante de adoção de condições para solucionar problemas matemáticos, como também para realizar de forma correta a experimentação de protótipos.

1.1 Grupos adimensionais

Como trata-se de um estudo praticamente experimental, vários engenheiros foram responsáveis por descobertas de grupos adimensionais, como o inverso do número de Reynolds. Suas aplicações são recorrentes, e a para obtê-las em seu estado final é pertinente comparar as forças comumente encontradas no escoamento (força viscosa, força de pressão, força de gravidade, tensão superficial e força de compressibilidade) com a força de inércia, para prever grupos adimensionais [9].

A título de maiores detalhes, demonstra-se a força de inércia por $F = ma$, equivalente a $\rho V V/t$, ou em MLt^{-2} , $(\rho L^3 L)/t^2 = \rho V^2 L^2$.

Equiparando a força viscosa τA em suas unidades e realizando a proporção da mesma com a força de inércia, para velocidade em du em um intervalo dy :

$$\tau A = \mu \frac{du}{dy} A \propto \mu \frac{V}{L} L^2 = \mu V L$$

logo:

$$\frac{\text{Força Viscosa}}{\text{Força de Inércia}} = \frac{\mu V L}{\rho V^2 L^2} = \frac{\mu}{\rho V L}$$

Analogamente, tem-se para a força de pressão:

$$\Delta P A \propto \Delta P L^2$$

assim:

$$\frac{\text{Força de Pressão}}{\text{Força de Inércia}} = \frac{\Delta P}{\rho V^2}$$

Ao efetuar processo semelhante para a força de gravidade, para a tensão superficial e para a força de compressibilidade, encontra-se respectivamente:

$$\frac{\text{Força de Gravidade}}{\text{Força de Inércia}} = \frac{gL}{V^2}$$

$$\frac{\text{Tensão Superficial}}{\text{Força de Inércia}} = \frac{\sigma}{\rho V^2 L}$$

$$\frac{\text{Força de Compressibilidade}}{\text{Força de Inércia}} = \frac{E_v}{\rho V^2}$$

Os parâmetros adimensionais mencionados são amplamente conhecidos tanto em testes aerodinâmicos, por exemplo, quanto no estudo básico da mecânica dos fluidos. Isso expressa a importância destes termos na compreensão do escoamento.

O primeiro parâmetro, a razão entre a força de pressão e a força de inércia, é extremamente conhecido em seu inverso, como o número de Reynolds, desenvolvido pelo engenheiro britânico Osborne Reynolds, na pesquisa de escoamentos laminares e turbulentos em um tubo. O valor do número de Reynolds demonstra o tipo de escoamento. Para números grandes, os escoamentos são em geral turbulentos, e para pequenos, são laminares ou, se a força de inércia é grande ou pequena, respectivamente [18].

O número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu}$$

Para efeitos dinâmicos, no segundo parâmetro adimensional, é conveniente adicionar à força de inércia, isto é, adicionar a energia associada ao movimento. Com isso, o parâmetro é alterado e chamado de Coeficiente de Pressão C_p ou número de Euler, em decorrência do matemático suíço Leonhard Euler ter sido um dos pioneiros da relação entre pressão e fluido.

$$Eu = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

Nessa situação, no número de Euler, a pressão é considerada em relação a corrente livre. Mas o mesmo parâmetro poder ser aplicado em outras ramos da mecânica dos fluidos, como no fenômeno da cavitação, em que ΔP é a diferença entre a pressão na corrente líquida P e a pressão de vapor do líquido P_v , na temperatura considerada. O parâmetro resultante é chamado número ou índice de cavitação e, quanto menor, mais é provável ocorrer a cavitação.

$$Ca = \frac{P - P_v}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

O quadrado do número de Froude, descoberto pelo arquiteto naval britânico e o seu filho Robert Edmund Froude, é a razão entre a força de inércia e a de gravidade, novamente o inverso do parâmetro adimensional encontrado anteriormente, onde o valor corresponde do escoamento subcrítico ao supercrítico, ou seja, informa ocorrência de resposta à um estímulo externo e a relação desta com a propagação da onda.

$$Fr^2 = \frac{V^2}{gL}$$

O quarto parâmetro adimensional indica a existência e a frequência de ondas capilares em uma superfície livre. Da mesma maneira, é mais conhecido pela sua razão inversa, como o número de Weber [19,22]. E finalmente, o parâmetro conhecido como o número de Mach, é caracterizado pela relação entre a velocidade do som c e a velocidade do escoamento V , podendo ser introduzida a força de compressibilidade, partindo da definição do diferencial de pressão em relação a massa específica, disso a importância fundamental no número de Weber para análise da compressibilidade de fluidos.

Veja a aplicação de $dP/d\rho = E_V\rho$, utilizando da propagação do som como o efeito da pressão na massa específica do fluido em estudo, e reparando ainda que se a velocidade do som tender ao infinito durante sua propagação no fluido, o número de Mach torna-se zero, de modo que o fluido é idealmente incompressível:

$$M = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{\frac{dP}{d\rho}}} = \frac{V}{\sqrt{\frac{E_V}{\rho}}}$$

ou em MLt^{-2} ao quadrado, designa-se o inverso do parâmetro inicial:

$$M^2 = \frac{V^2\rho}{E_V}$$

Os grupos adimensionais constituem uma ferramenta de simples uso, mas fundamental em sua praticidade, tornando possível conhecer as propriedades fundamentais de um escoamento antes mesmo de realizar experiências, pois foram obtidos por princípios baseados no Teorema Pi de Buckingham. Princípios estes guiarão a presente aplicação hidráulica.

As equações básicas adimensionais foram desenvolvidas analiticamente. A seguir, será apresentada uma metodologia fundamentada na obtenção de grupos adimensionais que representem aspectos importantes no entendimento do escoamento e seus efeitos [14]. E com isso, curvas que relacionem a altura de carga, a vazão volumétrica e as velocidades do rotor de uma bomba centrífuga poderão ser obtidas, demonstrando sua resolução em algo frequente na engenharia, o estudo de bombas, porém detalhadamente.

2. MATERIAL E MÉTODOS

A produção deste trabalho envolve reunião de conhecimentos relativos em periódicos e livros. Ao propor esta revisão, o artigo se mostra na função de facilitar a compreensão do leitor sobre o tema abordado, referindo-se a um tratamento focalizado e detalhado do assunto. Ao estudar as propriedades das bombas centrífugas por meio do Teorema Pi de Buckingham, devido a complexidade do tema, é percebido uma necessidade de uma contribuição bibliográfica.

Para tanto, foram utilizadas bases de dados e conhecimentos específicos advindos de bibliografias específicas, utilizando recursos computacionais na plotagem de dados pertinentes e propondo uma maior proximidade com os resultados. Ao explorar recursos computacionais, cálculos foram facilitados e apresentados de uma maneira mais organizada e sucinta.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Parâmetros iniciais

Ao observar as equações adimensionais, alguns coeficientes adimensionais podem ser percebidos, das últimas equações por exemplo. Disso, o inverso do número de Reynolds está associado aos termos viscosos (derivadas parciais de segunda ordem). Assim, o valor obtido pelo inverso do coeficiente possui relação direta ao número e, por conceitos iniciais das leis de viscosidade dos fluidos, está igualmente correlacionado a facilidade de escoamento, influenciando a velocidade quando acoplados ao gradiente de pressão [10]. Essa observação é análoga ao termo $gL V_{\infty}^2$, onde as forças gravitacionais são regidas por uma proporcionalidade entre a velocidade de corrente livre e o comprimento de referência.

Para a apuração precisa de fenômenos físicos em diversos fins, é conveniente a realização de experimentos, por escalas ou não [8]. A título de exemplificação, a experimentação da relação de coeficientes de arrasto e suas dependências as propriedades em uma esfera, podem depender de aspectos da esfera e do fluido. De início, propriedades correlatas tem de ser identificadas, como o diâmetro D da esfera, a velocidade V do fluido, sua viscosidade μ e da massa específica ρ .

Nesta situação, alguns parâmetros podem não ter sido mencionados em toda a abrangência existente, no entanto, com a identificação dos termos essenciais e a utilização de experiências em larga escala, é possível introduzir uma curva generalizada para diversos materiais, diversas medidas da esfera e constantes do fluido, postas em termos das propriedades identificadas inicialmente. Entretanto, a complicação é o

exercício trabalhoso desta operação, tanto em termos de logística, quanto da própria execução [7].

Para tornar significativamente menos trabalhosa a obtenção e análise de dados de maneira experimental, é de extrema ajuda obter com base em uma quantidade de dados restrita, uma curva que relacione os mesmos em um intervalo modificável das propriedades relacionadas a força de arrasto. E de fato, a ferramenta expressa adiante é utilizável de modo prático, e isso é feito pela relação entre a função dimensional e pela equivalente em parâmetros adimensionais [13].

3.2 O teorema pi de Buckingham

Primeiramente, determina-se um grupo de propriedades julgadas pertinentes ao estudo da situação, uma função F genérica irá conter essas variáveis. Todas são visualizadas como um parâmetro qualquer q contido em uma função g , juntamente a outras propriedades contidas na função q [5]. Logo, para n parâmetros:

$$g(q_1, q_2, \dots, q_n) = 0$$

Esses parâmetros dimensionais podem ser transformados em parâmetros adimensionais Π , em uma quantidade $n - m$, onde m é o número mínimo de dimensões independentes associadas, chamados de parâmetros repetentes [24]. Os últimos quando combinados os parâmetros restantes do domínio de g formam Π , definido formalmente por:

$$G(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$$

Em que cada Π pode deduzir-se um conjunto de propriedades em uma função, como para Π_1 e G_1 :

$$\Pi_1 = G_1(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-m})$$

onde a relação entre G e G_1 apenas deve ser obtida por meio experimental; e os Π são independentes quando obtidos pelo meio descrito. Quando formando pela combinação entre outros parâmetros Π , o parâmetro resultante não é considerado independente [11].

O procedimento de escolha dos grupos Π é relativamente simples, no entanto, exige um apropriado conhecimento das propriedades físicas e geométricas, alguns problemas podem parecer exigir muitas características. A maneira mais segura é a escolha de todas as propriedades que apresentem a suspeita de efetivamente influenciarem experimentalmente, conforme a relação entre esses parâmetros é obtida.

Dessa forma, há meios que substituem os trabalhosos procedimentos experimentais no que se refere ao teste de parâmetros [1]. Esses mais simplórios por

dependerem fundamentalmente da área físico-matemática. De início, ocorre a listagem dos parâmetros dimensionais julgados pertinentes, no caso da escolha de parâmetros não necessários, em algum momento, este mostrará sua obsolescência. Depois serão estabelecidas as dimensões primárias e os parâmetros serão postos em termos dessas. Logo após, é realizada a correta identificação dos parâmetros repetentes, estes contêm as dimensões primárias (não incluso os termos somente com variações quantitativas) e a partir disso, serão formados grupos dimensionais, combinando os parâmetros repetentes com os remanescentes. E por fim, os grupos dimensionais são resolvidos, os tornando adimensionais [18].

Ressalta-se que o número $n - m$ mostra a quantidade de parâmetros adimensionais necessários. Onde m é igual a r na maioria dos casos, mas quando os termos devem ser escolhidos em diferentes sistemas de dimensões primárias (Mt, Ft , por exemplo). Por observação, percebe-se que os parâmetros repetentes são escolhidos pela generalização das dimensões primárias presentes. E dessa maneira, os grupos adimensionais apresentarão os mesmos em diversas maneiras, desde a correta seleção de dimensões [15].

São variadas as forças fluídas que surgem ao selecionar os parâmetros repetentes, isso experimentalmente é muito útil, por propiciar a correlação de uma grande quantidade de dados, um dos benefícios é a menor propensão ao erro. Além disso, vários parâmetros dimensionais particulares podem ser expressos por meio de análises cuidadosas, como por exemplo, tendo parâmetros repetentes ρ , V e L no caso de forças atuantes na área superficial de um objeto, adotar ρV^2 como valores de tensões, isto significa que ao combinar com outra força, uma quantidade adimensional é obtida [6,25].

3.3 Análise dimensional de uma bomba centrífuga

Objetivando proporcionar conhecimentos práticos e teóricos, é importante compreender a origem do cálculo utilizado frequentemente. Para isso, faz-se necessário um estudo completo, e assim, mais que simplesmente compreender utilização recorrente, proporcionar estudos distintos, auxiliando tanto no uso comum da teoria, como em uma utilização mais desenvolvida, porém importante. Um desses casos, relativamente mais exigentes, constituem os estudos experimentais, sem os quais, não seria possível basear-se completamente em cálculos simplificados, exceto onde é permitido. Além disso, estudos especiais seriam exigidos ou complementados com os

dados a seguir no estudo da cavitação em função da altura de sucção-cavitação e da velocidade específica [4].

Supondo então uma situação, na qual é preciso estudar as capacidades de uma bomba centrífuga, é conveniente relacionar com dados mais práticos, como a altura de carga. A relação mencionada é recorrente na hidráulica, trata-se da curva em função das variáveis de velocidade do rotor, da vazão volumétrica e, como mencionado, da altura de carga.

Possuindo os dados, a discussão consiste na relação real entre eles. Sendo assim, inicialmente lista-se dados para a vazão volumétrica Q e para a altura de carga ΔP . Sabe-se que a altura de carga é uma medida da diferença entre cotas de cargas aplicadas, variando em função da vazão Q , da velocidade angular ω , do diâmetro D do rotor e da massa específica do fluido, no caso, a água [21].

A relação Q (m^3/h) e ΔP (kPa) atingida por meio de estudos anteriores [9] está apresentada na TABELA 1:

Tabela 1: Vazão (Q) versus Altura de Carga (ΔP) para $\omega = 800 \text{ rpm}$

Q (m^3/h)	ΔP (kPa)	Q (m^3/h)	ΔP (kPa)
0	361	250	230
100	349	300	145
150	328	325	114
200	293	350	59

Com o intuito de esboçar graficamente a relação entre as variáveis envolvidas, é necessária uma função. E para determiná-la, pode-se utilizar o Teorema Pi de Buckingham e encontrar o número de grupos Π , além de seus valores dimensionais que equacionados tornam-se adimensionais.

Seleciona-se o número de parâmetros dimensionais idealizando as variáveis dependentes da altura de carga ΔP . Para tanto, há $n = 5$ parâmetros dimensionais envolvidos, isto é, a própria altura de carga ΔP , a vazão volumétrica Q , a velocidade angular ω , o diâmetro do rotor D e a densidade da água ρ [17].

Todos os parâmetros dimensionais podem ser representados por três dimensões primárias ($r = 3$), em M , L e t , onde a altura de carga é a diferença de pressão entre as cotas. Assim:

ΔP	Q	ω	D	ρ
$\frac{M}{Lt^2}$	$\frac{L^3}{t}$	$\frac{1}{t}$	L	$\frac{M}{L^3}$

Na determinação do número de grupos Π , basta realizar $n - m$, onde m é o número de parâmetros repetentes. Portanto, $n - m = 2$. Ao combinar os parâmetros repetentes (ρ , D e ω) com os remanescentes, adquire-se para Π_1 e ΔP :

$$\Pi_1 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{1}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{M}{Lt^2}\right) = 1 = M^0 L^0 t^0 \quad (5)$$

Logo, a resolução das exponenciais são respectivamente:

$$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \quad -b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \quad -3a + c - 1 = 0 \Rightarrow c = -2$$

e adquire-se para Π_2 de parâmetro remanescente Q :

$$\Pi_2 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{1}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{L^3}{t}\right) = M^0 L^0 t^0 \quad (6)$$

$$a = 0 \quad -b - 1 = 0 \Rightarrow b = -1 \quad -3a + c + 3 = 0 \Rightarrow c = -3$$

Dessa forma, constata-se Π_1 e Π_2 :

$$\Pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho \omega^2 D^2} \quad \Pi_2 = \frac{Q}{\omega D^3}$$

Observe na FIGURA 1 que os dados da vazão volumétrica Q e da altura de carga ΔP , formam aproximadamente uma curva parabólica, assim pode-se relacionar Π_1 e Π_2 por $\Pi_1 = f(\Pi_2)$, na equação da parábola (Equação 6). Assim:

$$\frac{\Delta P}{\rho \omega^2 D^2} = a \left(\frac{Q}{\omega D^3}\right)^2 + b \left(\frac{Q}{\omega D^3}\right) + c \quad (7)$$

Na adoção de uma base de dados, na qual a velocidade do rotor é $\omega = 800$ rpm, para a água como fluido, o diâmetro não foi fornecido, mas pode-se adotar o

valor unitário para dimensões L não dadas. Logo, as unidades serão convertidas para t em segundos, e o L da velocidade angular ω e do diâmetro D , serão termos neutros, pois $L = 1$ em dados não fornecidos. Assim, estabelecendo-se de início uma escala para os resultados.

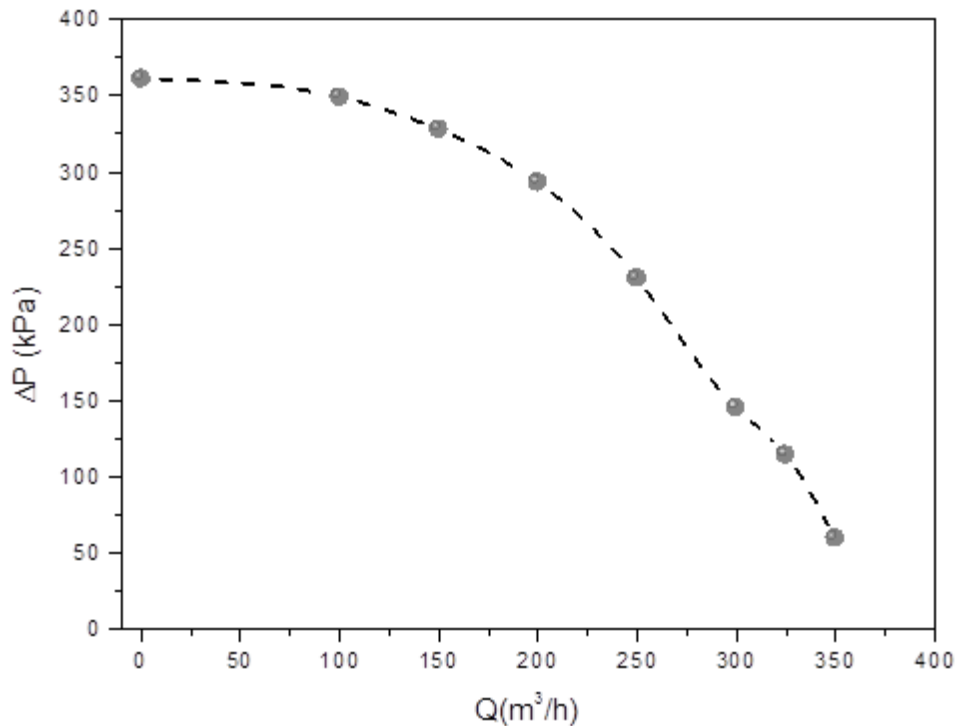


Figura 1: Curva vazão volumétrica (Q) em função da altura de carga (ΔP).

Dispondo desses dados, combinados a vazão e a altura de carga, pode-se determinar a , b e c por uma curva de tendência que aproxime uma parábola com base em $Q/(\omega D^3)$ e $\Delta P/(\rho \omega^2 D^2)$ apresentados a seguir (TABELA 2) :

Tabela 2. $\Pi_2 \times \Pi_1$

Q (ωD^3)	ΔP ($\rho \omega^2 D^2$)	Q (ωD^3)	ΔP ($\rho \omega^2 D^2$)
0,000000	0,05148	0,000828	0,03280
0,000331	0,04977	0,000994	0,02068
0,000497	0,04678	0,00107	0,01625
0,000663	0,04178	0,00116	0,00841

Os dados podem ser representados por uma linha de tendência que expressa a , b e c . Observe os dados Π_1 , Π_2 e a linha de tendência com os mesmos. A FIGURA 2 apresenta os dados de $Q/(\omega D^2)$ e $\Delta P/(\rho \omega^2 D^2)$ e relacionados por uma curva de tendência parabólica e, por conseguinte, sua respectiva função com o coeficiente de determinação R^2 .

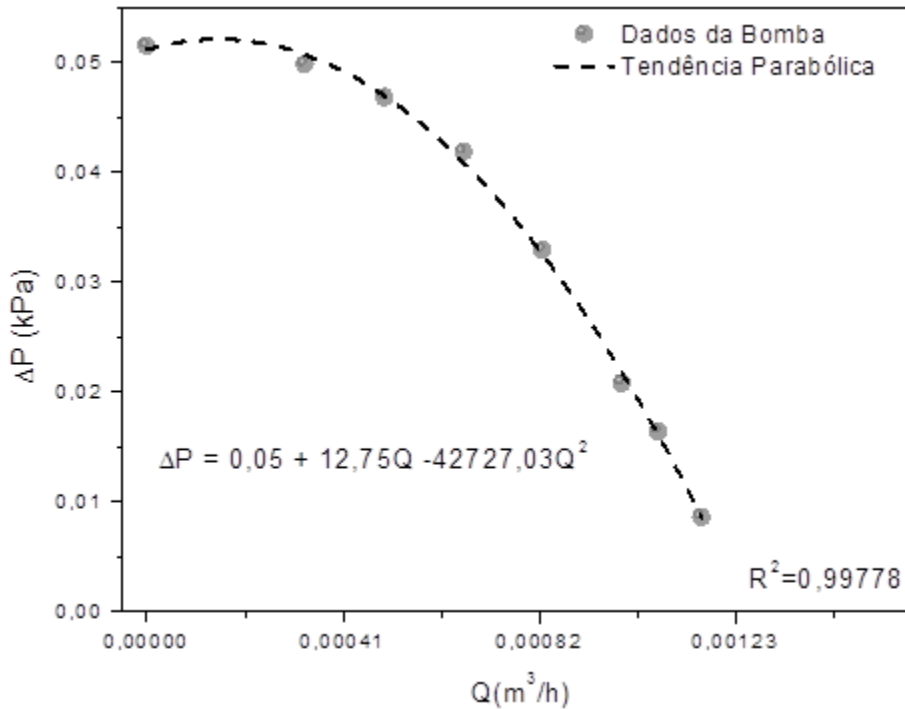


Figura 3. Dados de $Q/(\omega D^2)$ e $\Delta P/(\rho \omega^2 D^2)$ relacionados por uma curva de tendência parabólica (R^2).

Percebe-se pela FIGURA 2, $a = -42727$, $b = 12,752$ e $c = 0,0512$, onde inclusive, o alto valor do coeficiente de determinação indica alta tendência dos dados à curva parabólica. Portanto, ao substituir na Equação (6):

$$\frac{\Delta P}{\rho \omega^2 D^2} = -42727 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right)^2 + 12,752 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right) + 0,0512$$

O que foi demonstrado proporciona encontrar curvas que relacionem a altura de carga e a vazão volumétrica para diferentes velocidades angulares. Por consequência, considera-se três curvas com diferentes relações entre Q e ΔP para

velocidades angulares de 600 rpm, 800 rpm e 1200 rpm. Utilizando de vazões arbitrárias, determina-se ΔP por:

$$\Delta P = \rho \omega^2 D^2 \left[-42727 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right)^2 + 12,752 \left(\frac{Q}{\omega D^3} \right) + 0,0512 \right]$$

Para Q e $\omega = 600 \text{ rpm}$ substituído acima, conhecidos $L = 1$ e $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ (TABELA 3):

Tabela 3: Vazão (Q) versus Altura de Carga (ΔP) para $\omega = 600 \text{ rpm}$

Q (m^3/h)	ΔP (kPa)	Q (m^3/h)	ΔP (kPa)
0	201	100	191
25	205	150	161
50	204	225	85
75	200	275	13

e para $\omega = 1200 \text{ rpm}$ (TABELA 4):

Tabela 4: Vazão (Q) versus Altura de Carga (ΔP) para $\omega = 1200 \text{ rpm}$

Q (m^3/h)	ΔP (kPa)	Q (m^3/h)	ΔP (kPa)
0	807	175	786
25	816	250	715
50	821	300	646
100	819	350	561

As curvas para $\omega = 600$ e $\omega = 1200$ foram deduzidas a partir da linha de tendência de $\omega = 800$. Portanto, todos os dados necessários para a comparação foram obtidos, resta representa-los graficamente.

As curvas da bomba centrífuga na FIGURA 3 são para diversas velocidades a partir de uma aproximação de dados obtidos para uma específica velocidade angular de 800 rpm, sendo possível adaptar a máquina a diferentes vazões para alturas de carga variando a velocidade, isto é, modificando a velocidade angular do rotor encontram-se

novas relações entre a vazão volumétrica Q e a altura de carga ΔP a partir de dados já conhecidos por uma velocidade angular pré-estabelecida [3].

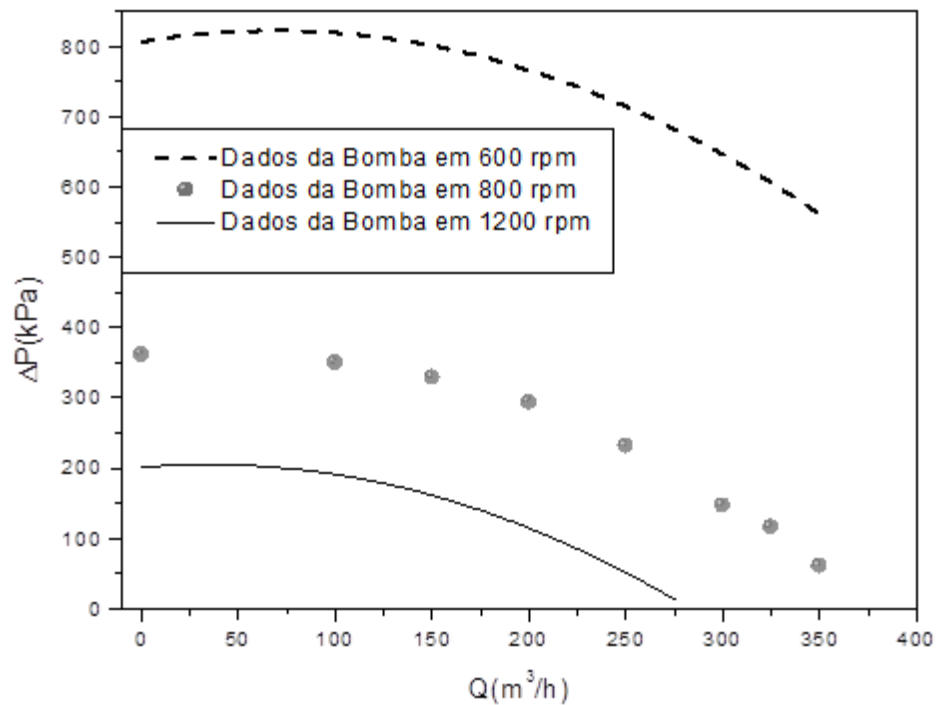


Figura 4. Curvas da Bomba Centrífuga para diferentes velocidades angulares, aproximadas por meio dos dados da bomba em 800 rpm.

Constitui-se essa uma ferramenta de larga aplicação na engenharia, onde o Teorema Pi de Buckingham relaciona de forma adimensional (pois há nulidade dos termos) as propriedades intrínsecas do escoamento com a configuração do próprio, organizando as variáveis dependentes a forma do escoamento, caracterizado pela curva de tendência. Assim, apropriando-se da curva de tendência é possível correlacionar em termos genéricos, a forma desta em outras situações (curvas), das quais a melhor avaliação corresponde a melhor adequação à situação de aplicação da máquina [2,23].

4. CONCLUSÕES

Com base na análise dimensional é possível estabelecer diversos parâmetros para diversas áreas de conhecimentos afins, obtendo constantes importantes e frequentemente empregadas de modo conceitual, como as mais conhecidas, os números de Reynolds, de Euler, de Weber, entre outras. Entretanto, a análise

dimensional apresentou-se esquematizada em um processo por meio da utilização do teorema do pi de Buckingham, sendo tanto importante quanto estabelecer relações adimensionais entre as variáveis de leis conhecidas, as equações diferenciais básicas do escoamento, por exemplo. Pois, fundamentalmente, no teorema são encontradas as relações entre variáveis julgadas experimentalmente. Esse fato, possibilita a simplificação de diversos estudos na área da mecânica dos fluidos por proporcionar com relativa exatidão, resultados não tendo considerações iniciais completamente descritas em todos os fenômenos físicos envolvidos, mas apenas envolve a capacidade de identificação dos fatores gerais responsáveis.

Na área da hidráulica, tais conceitos são constantemente exercidos, como na determinação de curvas que relacionem a vazão volumétrica e a altura de carga para diferentes velocidades angulares, com base em dados experimentais e dos parâmetros adimensionais dependentes dos mesmos [12]. No estudo presente em uma bomba centrífuga, a curva inicial apresenta alto coeficiente de regressão (linha de tendência próxima da disposição dos dados), isto significa que na obtenção das outras curvas, a segurança quanto a correção dos dados é maior. Repare que apenas um estudo experimental apurado, permitiu outros estudos, porém dispondo de ferramentas matemáticas. Dessa maneira, constitui-se uma ferramenta prática da área experimental, ao promover análises relativamente rápidas e concisas e, proporcionar maior economia de tempo, gastos em logísticas e, fatores consequentes, em qualquer área relacionada [16].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BADIE, R.; JONKER, J. B.; BRAEMBUSSCHE, R. A. V. D. Finite element calculations and experimental verification of the unsteady potential flow in a centrifugal volute pump. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 19, n.12, p. 1083-1102, 1994.
- [2] BALARIM, C. R.; TARGA, L. A.; FILHO, J. S. V. et al. Custo de bombas centrífugas funcionando como turbinas em microcentrais hidrelétricas. **Engenharia Agrícola**, v.24, n.01, p. 219-225, 2004.
- [3] BARRETO, R. P. Cavitação y materiales de construcción em las bombas centrífugas. **Minería y Geología**, Cuba, n. 3-4, p. 114-118, 2004.
- [4] _____. Procedimiento para evaluar y seleccionar bombas centrífugas. **Minería y Geología**, Cuba, n. 1-2, p.84-88, 2004.

- [5] BLÖSCHL, G.; SIVAPALAN, M. Scale issues in hydrological modelling: a review. **Hydrological Processes**, v. 6, n. 3-4, p. 251-290, 1994.
- [6] CAGNOLI, B.; ROMANO, G. P. Effects of flow volume and grain size on mobility of dry granular flows of angular rock fragments: a functional relationship of scaling parameters. **Journal of Geophysical Research**, v. 117, n. B2, p. 1-13, 2012.
- [7] COHEN, D.; LEHMANN, P.; OR, D. Fiber bundle model for multiscale modeling of hydromechanical triggering of shallow landslides. **Water Resources Research**, p. 01-20, 29 out. 2009.
- [8] DIAKUN, J.; JAKUBOWSKI, M. Dimensionless numbers of structural and process similitude of a whirlpool hot trub separator. **Journal of Food Process Engineering**, v. 36, n. 6, p. 748-752, 2013.
- [9] FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; LEYLEGIAN, J. C. Análise dimensional e semelhança. In: _____. **Introdução à mecânica dos fluidos**. 7 th ed. Rio de Janeiro, Brasil. LTC, 2011. p. 255-286.
- [10] HOUSEN, K. R.; SCHMIDT, R. M.; HOLSAPPLE, K. A. Crater ejecta scaling laws: fundamental forms based on dimensional analysis. **Journal of Geophysical Research**, p. 2485-2499, 1983.
- [11] DAWDY, D. A Review of rainfall-runoff, physical models as developed by dimensional analysis and other methods. **Water Resources Research**, v.3, n.3, p. 881-889, 1967.
- [12] KINZLI, K. D.; THORNTON, C. I. Predicting velocity in bendway weir eddy fields. **River Research and Applications**, v. 26, n. 7, p. 823-834, 2010.
- [13] KÜHLEIS, G.P. et al. **Visualização de escoamento em modelo de escala reduzida**. 2009. 14 f. Trabalho Final da Disciplina de Medições Térmicas (Graduação), Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2009.
- [14] LI, Y.; HENCEY, B.; ALLEYNE, A. Dimensional analysis for robust control of planar vehicle dynamics. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v.18, n. 6, p. 587-616, 2007.
- [15] MERRIKH-BAYAT, F. General rules for optimal tuning the $pi^lambda d^mu$ controllers with application to first-order plus time delay processes. **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 90, n. 6, p. 1400-1410, 2012.
- [16] MESQUITA, A. L. A. et al. Aspectos importantes na utilização de bombas centrifugas em velocidade variável para a redução do consumo de energia. In: VI SEREA - **Seminário Iberoamericano sobre Sistemas de Abastecimento Urbano de Água, Anais...** João Pessoa: Universidade Federal do Pará, 2006, p. 1-15.
- [17] MONISMITH, S. G.; FONG, D. A. A simple model of mixing in stratified tidal flows. **Journal of Mixing in Stratified Tidal Flows**, p. 28583-28595, 1996.
- [18] MUNSON, B.R.; YOUNG, D.F.; OKIISHI, T.H. Semelhança, análise dimensional e modelos. In: _____. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. 4.Ed. São Paulo, Brasil, Edgard Blücher, 2004. p. 344-397.

- [19] OSGOOD, N. L. The Performance burden of individual-based models through dimensional analysis and scale modeling. **Wiley InterScience**, p. 101-134, out. 2008.
- [20] RAJAN, K.; SUH, C.; MENDEZ, P. F. principal component analysis and dimensional analysis as material informatics tools to reduce dimensionality in materials science and engineering. **Wiley InterScience**, p. 361-371, 2009.
- [21] RICHTER, A.; HÖVEMEYER, D. Challenges of pump and process engineering for the transport of solids with hydraulic piston pumps. **Ernst & Sohn**, Alemanha, p. 54-66, 2014.
- [22] SAYLOR, J. R.; BOUNDS, G. D. Experimental of the role of the weber and capillary numbers on mesler entrainment. **Wiley Online Library**, EUA, p. 01-11, 2012.
- [23] TIMMS, W. A; HENDRY, M. J. Long-term reactive solute transport in an aquitard using a centrifuge model. **Ground Water**, v.46, n.04, p. 616-628, 2008.
- [24] YÜKÇÜ, N.; SENLIK, I.; ÖZTEKİN, E. Calculation of eletric multipole moment integrals with the different screening parameters via the Fourier transform method. **International Journal of Quantum Chemistry**, v. 112, n. 2, p. 414-425, 2012.
- [25] ZELEŇÁKOVÁ, M.; ČARNOGURSKÁ, M. A dimensional analysis-based model for the prediction of nitrogen concentrations in Laborec River, Slovakia. **Water and Environment Journal**, v. 27, n. 2, p. 284-291, 2013.