

CONTEXTO HISTÓRICO DO MÉTODO DE DIVISÃO E CONQUISTA E ABORDAGEM DO ESTUDO DE UM AUTOPROBLEMA NUMA QUESTÃO REAL

MARLUBIA CORRÊA DE PAULA¹, LORI VIALI², ELIAMAR CERESOLI RIZZON³

RESUMO

Este trabalho traz um relato sobre a resolução de autossistemas através do Método de Divisão e Conquista, por meio de uma abordagem envolvendo o contexto histórico como evidência do uso da técnica de dividir para conquistar. Após, apresenta-se um estudo que demonstra a utilização de autovalores e autovetores no problema de fluxo de potência para determinação de áreas de controle de tensão, usando para isso uma barra piloto (divisão do sistema total em pequenos autossistemas). O trabalho envolve a necessidade da utilização de autoprobemas para a solução de problemas em situação real. Essa análise ocorre em função da questão relativa ao controle de potência reativa em sistemas de potência, onde há necessidade de prever episódios que envolvam fenômenos de instabilidade de tensão. Dessa forma, são criados esquemas que possam controlar zonas de instabilidade em uma área, demonstrando, assim, a utilização prática (real) da ideia de autovetores em problemas de Engenharia Elétrica.

PALAVRAS-CHAVE: RESOLUÇÃO DE AUTOSSISTEMAS, MÉTODO DE DIVISÃO E CONQUISTA, SITUAÇÃO REAL, CONTEXTO HISTÓRICO, TÉCNICA.

HISTORICAL CONTEXT OF THE METHOD OF DIVIDE AND CONQUER AND AN APPROACH OF THE STUDY OF AN EIGENPROBLEM IN A REAL PROBLEM

ABSTRACT

This work presents a report on the resolution of auto systems by the Division and Conquest Method, through an approach involving the historical context as evidence of the divide-and-conquer technique use. Afterward, we present a study demonstrating the utilization of eigenvalues and eigenvectors in the power flow problem to determine voltage control areas using a pilot bar (a division of the total system into small eigensystems). The work involves the need to use eigenproblems to solve problems in real situations. This analysis is due to the issue related to reactive power control in power systems, where there is a need to predict episodes involving voltage instability phenomena. Thus, schemes are created that can control instability zones in an area, thus demonstrating the practical (actual) use of the idea of eigenvectors in Electrical Engineering problems.

¹ Departamento de Ciências e Tecnologias, Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Brasil, E-mail: mc paula@uesc.br

² Pós-Graduação em Educação em Matemática e Ciências, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil

³ Universidade de Passo Fundo, Rio Grande do Sul, Brasil

KEYWORDS: AUTO SYSTEM RESOLUTION, DIVISION AND CONQUEST METHOD, REAL SITUATION, HISTORICAL CONTEXT, TECHNIQUE

1. INTRODUÇÃO

Este relato refere-se a um dos assuntos da monografia apresentada ao curso de Especialização em Matemática Aplicada, do Instituto de Ciências Exatas e Geociências da Universidade de Passo Fundo, como requisito parcial para obtenção do grau de Especialista em Matemática Aplicada, realizada no ano de 2010 pela primeira autora. Ocorre que naquela época a autora estava lecionando para turmas tanto de Educação Básica quanto do Ensino Superior, e, deste modo, os estudos voltados à Matemática Aplicada auxiliavam no aprofundamento dos conteúdos referentes ao uso de matrizes. Nesse sentido, foi perceptível que técnicas utilizadas no desenvolvimento de tais conteúdos, por meio de procedimentos recursivos, se faziam presentes em ambos níveis de ensino. Contudo, essa presença não é perceptível à primeira vista.

Destarte, embora um aluno de Educação Básica desenvolva o gosto por jogos utilizados para fins didáticos, pode não ser perceptível a estratégia oriunda de situações descritas na história que foram absorvidas pelas técnicas utilizadas na própria Matemática Aplicada, desenvolvida no Ensino Superior. Nesse sentido, ao realizar um curso nessa área de ensino, a autora identificou tal ocorrência quando fez estudos sobre matrizes tridiagonais simétricas e constatou, nessa aprendizagem, a necessidade de apropriação da estratégia de dividir para conquistar.

Assim, esse estudo em Matemática Aplicada ocorreu na primeira década do ano 2000. Nessa época, os cursos de mestrado e doutorado eram ainda de difícil acesso para uma professora de Educação Básica, por pelo menos dois motivos: carga horária em escolas que não permitiam viagens à capital para realizar a formação, fato que evidencia o segundo motivo, pois isso causaria altos custos, os quais o salário de professora de matemática, por óbvio, não comportaria.

Da conclusão do curso de Matemática Aplicada, com a apresentação do Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) voltado ao estudo de matrizes tridiagonais simétricas, tomando por base a dissertação de Ceresoli [2] e a tese de Fachin [3], decorreu a referência teórica deste relato.

Dado o período decorrido, numa consulta atualizada, tentou-se acrescentar a Ceresoli [2] e Fachin [3] outras referências advindas do repositório do catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível

Superior (CAPES) ou da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Para o filtro de busca na CAPES, fez-se uso quanto às palavras-chave: Torre de Hanói; Hanoy; quanto à área acadêmica: mestrado e mestrado profissional; quanto à grande área de conhecimento: ciências exatas e da terra, interdisciplinar, ciências da saúde, linguística, letras e artes. Ao aplicar novo filtro, resultaram quatro dissertações da área de conhecimento: matemática. O período de busca, tanto para CAPES quanto para BDTD, reportou-se ao quadriênio 2016-2020.

Os resultados obtidos no repositório CAPES permitiram identificar publicações apenas nos de 2017 e 2016, sendo neste último ano o registro de duas dissertações. Na BDTD não foram localizados outros trabalhos após realização de busca, conservando os mesmos critérios adotados anteriormente para a busca no repositório CAPES.

Diante disso, constata-se que o uso do jogo Torre de Hanói ainda tem sido uma estratégia pouco estudada em cursos strictu sensu. No entanto, o uso da estratégia de “Dividir para conquistar” é facilmente localizado nestes repositórios, dispensando, assim, maiores detalhamentos. Convém ainda ressaltar que o uso dos termos que possibilitariam a identificação da temática “matriz simétrica tridiagonal” não foram objeto de busca, pois o interesse recaiu sobre a identificação da estratégia de divisão e conquista, por meio da identificação de uso da Torre de Hanói presente nestas publicações.

Nesse interim, ocorreu a ideia do registro desta temática, afinal problemas aplicados, muitas vezes, envolvem o estudo de autoproblemas reais e simétricos, os quais são de grande utilidade em toda matemática, destacando-se em áreas como a computação, a física, as engenharias e a química [2]. Desse modo, o uso de ideias identificadas como correlatas à Matemática Aplicada podem auxiliar no ensino da matemática desenvolvida desde a realização do ensino situado na Educação Básica.

Após esta justificativa, o presente relato descreve o Método de Divisão e Conquista, e, na sequência, apresenta uma situação envolvendo um autoproblema tridiagonal simétrico, para o qual existem diferentes métodos de solução, salientando que este Método deve ser utilizado diretamente em matrizes com estas especificações [2, 3]. Dentro dessa dinâmica, sabe-se que pode ocorrer a transformação de uma matriz simétrica em uma matriz tridiagonal simétrica, podendo-se assim fazer uso do método em qualquer matriz simétrica.

Diante disso, para compreensão do Método de Divisão e Conquista, se faz necessária a apresentação de seus passos no contexto histórico em que se deu tal apreensão. Na sequência, aborda-se uma questão prática envolvendo autoproblemas,

no problema de fluxo de potência para a determinação de áreas de controle de tensão. Após, faz-se o fechamento com as necessárias considerações finais.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Dividir para conquistar – pode-se tomar esse princípio romano como sendo a base para a constituição do Método Divisão-e-Conquista. A importância do Método dentro de estruturas que permitam resolver sistemas de ordem n , que envolvam de início matrizes simétricas tridiagonais, é evidenciada, como anteriormente citado, em diversas publicações (dissertações e teses).

A técnica que consiste na divisão para se alcançar a conquista toma como norma dividir um problema maior em problemas suficientemente pequenos, até que a solução do problema inicial seja dada pela combinação dos resultados dos problemas menores; muitos problemas podem ser resolvidos com o uso desta estratégia. Em relação a essa possibilidade, um problema clássico que demonstra o potencial das resoluções, obtidas passo a passo, com o intuito de constituir um fim está presente nas ações realizadas com o uso de um jogo, atualmente conhecido e disponibilizado on-line. Esse jogo requer uma estrutura composta por hastes/pinos e discos, conforme o que segue:

Constitui-se em uma base com três pinos, na posição vertical em relação à base. No pino de uma das extremidades, há uma sequência de discos de ordem crescente de diâmetro, de cima para baixo. O objetivo do jogo é passar todos os discos para o terceiro pino, conseguindo completar a transferência com o número mínimo possível de movimentos, com o detalhe de que no momento da passagem, os discos que possuem maior diâmetro, nunca fiquem sobre os de menor diâmetro. Normalmente, esse jogo encontra-se contendo três discos, mas a quantidade pode aumentar, tornando o grau de dificuldade mais elevado de acordo com o número de discos utilizados. Para completar tal desafio, é preciso tanto do pino que está sendo ocupado pela torre inicial, quanto dos que não estão [4].

Mas, de onde surgiu essa lógica de resolução? Nessa historicidade, identifica-se a presença de Edouard Lucas (matemático francês), que, nos anos de 1883, elaborou uma lenda sobre a Torre de Brahma com base na história envolvendo monges e uma situação descrita como sendo o término do mundo. Dentro dessa condição,

no tempo de Benares, cidade santa da Índia, sob a cúpula que marcava o centro do mundo, existia uma bandeja de bronze com três agulhas de diamantes, cada uma de um palmo de altura e de grossura do corpo de uma abelha. Durante a Criação, Deus colocou 64 discos de ouro puro em uma das agulhas, o maior deles imediatamente acima da bandeja e os demais, cada vez menores, por cima. Esta torre foi chamada de Torre de Brahma. Dia e noite

sacerdotes trocavam os discos de uma agulha para outra, de acordo com as leis imutáveis de Brahma. Essa lei dizia que o sacerdote do turno não poderia mover mais de um disco por vez, e que o disco fosse colocado na outra agulha, de maneira que o de baixo nunca fosse menor do que de cima. Quando todos os 64 discos tivessem sido transferidos da agulha colocada por Deus no dia da Criação para outra agulha, o mundo deixaria de existir. Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos na razão de 1 disco por segundo. Será que veremos o mundo acabar? [10]

No exemplo que envolve a Torre de Hanói (Fig. 1), se pode entender a ideia de recursividade, onde um sistema pode chamar a si mesmo na busca de solução. Neste processo, há repetição de uma situação de forma semelhante ao sistema inicial. Para a Torre de Hanói utilizada em jogos disponíveis on-line, pode-se identificar a presença de oito discos, algumas vezes sinalizados por distintas cores.



FIGURA 1 – Torre de Hanói [8]

Dessa forma, encontramos na história uma referência sobre o uso do Método de Divisão e Conquista, nem sempre reconhecido desse modo, presente na lógica de resolução necessária à Torre de Hanói. Este uso pode ser útil ao ensino sobre práticas e reconhecimentos de estratégia para resolução de problemas em outros contextos.

3. DISSERTAÇÕES (2016-2020): TORRE DE HANÓI

O uso de temáticas no ensino de matemática realizado na Educação Básica advém das aprendizagens desenvolvidas também pelos professores em cursos de mestrado e doutorado (profissionais e acadêmicos). Nesse sentido, esses cursos têm nestas escolas o ambiente natural de suas pesquisas e aplicação de estratégias, que contribuam para melhores aprendizagens deste componente curricular.

No entanto, conforme busca realizada, foi possível constatar que o jogo Torre de Hanói ainda é pouco utilizado como estratégia para aprendizagens sobre procedimentos recursivos que evidenciam a lógica de ações em algumas resoluções matemáticas, pois, muitas vezes, a dificuldade de resolução de uma questão está atrelada à impossibilidade de perceber a sequência correta de procedimentos. Embora

isso possa parecer um tanto abstrato, se percebe que o uso da Torre de Hanói oferece uma possibilidade de entendimento para a construção de uma estratégia de ação.

Diante dessa condução, foram identificadas no último quadriênio, quatro dissertações que fizeram uso deste jogo de forma a contribuir para o ensino de matemática. Conforme já exposto na introdução deste relato, as palavras-chave utilizadas foram: Torre de Hanói; Hanoy. Essa busca resultou dos trabalhos identificados via repositório CAPES. Para essa apresentação, foi constituída a Tabela 1, a seguir.

TABELA 1. Dissertações com uso da temática Torre de Hanói (2017)

| | | |
|-----------|----------------------------|--|
| 1. | Nome do autor (ano) | Miriam Silva Santos (2017) |
| | Título da dissertação | Algumas variações do jogo Torre de Hanói |
| | Curso | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| | Universidade | Universidade Estadual de Feira de Santana |
| 2. | Nome do autor (ano) | Jose Aldeci de Lima Silva (2017) |
| | Título da dissertação | Uma abordagem selecionada de sequências recorrentes |
| | Curso | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| | Universidade | Universidade Estadual do Ceará |
| 3. | Nome do autor (ano) | Aline Essinger Oliveira (2017) |
| | Título da dissertação | Análise Combinatória: aplicação de técnicas alternativas na resolução de problemas interessantes |
| | Curso | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| | Universidade | Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro |
| 4. | Nome do autor (ano) | Francisco Djacir Moreira da Silva (2017) |
| | Título da dissertação | Aplicações do princípio da indução matemática |
| | Curso | Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional |
| | Universidade | Universidade Federal do Cariri |

Fonte: produzido pelos autores

Sendo assim, retorna-se à questão do Método de Divisão e Conquista enquanto historicidade.

4. CONTEXTO HISTÓRICO DO MÉTODO DE DIVISÃO E CONQUISTA

Para melhor compreensão da ideia de dividir para conquistar, tem-se, em 1632, a época em que o filósofo René Descartes investigou um fato histórico para compreender a estratégia usada em guerras – especialmente nas Guerras Púnicas. Conforme registros, Roma lutou por cerca de 47 anos para derrotar Cartago, tendo conseguido resolver este problema somente após contratar um orientador: Publius Cornelius Scipio Africanus – de alcunha Cipião, o Africano –, general que havia nascido em Cartago e que, dado a isso, adotou a seguinte estratégia:

- definir claramente o problema;
- coletar informações para definir claramente as causas do problema;
- verificar as causas levantadas para descobrir sobre quais delas se pode agir;
- montar um plano de ação para as causas selecionadas, como passíveis de serem eliminadas;
- executar o plano de ação e medir o seu progresso;
- verificar a eficácia do plano de ação;
- padronizar a solução se o plano foi eficaz, ou tomar ações corretivas em caso contrário;
- concluir o processo aprendendo com uma reflexão sobre a sua execução.

Em razão desta estratégia adotada por Roma para vencer Cartago, Descartes compreendeu o que Maquiavel desejou traduzir em sua obra *O Príncipe*, datada de 1511. A partir disso, escreveu um discurso se utilizando desta metodologia em 1637. Assim, com base nesta percepção, o Método cartesiano contemplou quatro etapas [1], a saber:

- regra da evidência: não aceitar como verdadeiro aquilo que não é evidente;
- regra da análise: dividir o problema em entes menores, reduzindo o que não se conhece ao que se pode conhecer;
- regra de síntese: conduzir os pensamentos dos mais simples aos mais complexos, instituindo uma ordem em sua elaboração;

- regra da enumeração: revisar cada parte para verificar se nada foi omitido.

Na estratégia de “Dividir para Conquistar” se pode presenciar exatamente as etapas descritas por Descartes. Este contexto histórico constitui uma ilustração também para ratificar, pois:

René Descartes é considerado um dos principais articuladores da revolução do pensamento que marcou o século XVII. Logo após o conturbado período de revoluções intelectuais no fim da Idade Média, chamado Renascimento, a filosofia ainda respirava os antigos ares da escolástica. Podemos afirmar que foi com a filosofia elaborada por ele que o mundo moderno, marcado pelo racionalismo triunfante, teve início. O “pai da filosofia moderna”, como é frequentemente chamado, fez de sua obra um marco do pensamento ocidental moderno. Passou a desenvolver um método que consistia basicamente em desmistificar a realidade observada, por meio de sua decomposição em partes que apresentassem a mesma simplicidade, exatidão, incontestabilidade, indubitabilidade, clareza, e assim por diante, das proposições matemáticas. Ao sugerir este método, Descartes deixa evidente que o princípio fundamental para alcançar esta clareza nas observações era o antônimo da certeza, a saber, a dúvida. Somente por meio do ato de duvidar das coisas ao extremo chegaríamos à mais clara certeza de que, ao duvidar, pensamos, ao pensar, existimos, ao existir, teríamos um elo com uma entidade criadora repleta de verdade (Deus cartesiano). [9, p. 513-522]

Dessa forma, Descartes torna o caminho pelo qual se constrói o pensamento como uma maneira de visualizar a ideia de dividir algo complexo em pequenas unidades, para que a lógica de desenvolvimento do procedimento seja compreendida. Conforme tradução da obra de Descartes O Método, identificada em Jacob [6], tem-se que:

[...] tal como os pintores que, não podendo representar igualmente bem num quadro plano todas as diversas faces de um corpo sólido, escolhem uma das principais, que colocam à luz, e, sombreando as outras, só as fazem aparecer tanto quanto se possa vê-las ao olhar aquela; assim, temendo não poder pôr em meu discurso tudo o que tinha no pensamento, tentei apenas expor bem amplamente o que concebia da luz; depois, no seu ensejo, acrescentar alguma coisa sobre o sol e as estrelas fixas, porque a luz procede quase toda deles; sobre os céus, porque a transmitem; sobre os planetas, os cometas e a terra, porque a refletem; e, em particular, sobre todos os corpos que há sobre a Terra, porque são ou coloridos, ou transparentes, ou brilhantes; e, enfim, sobre o homem, porque é o seu espectador. [6, p. 9].

Após ter sido constituído o tópico sobre a questão histórica, passa-se à abordagem sobre a presença de um autoproblema que situa o Método de Divisão e Conquista numa aplicação real.

5. ABORDAGEM DO ESTUDO DE UM AUTOPROBLEMA NUMA QUESTÃO REAL

Com o interesse de discorrer sobre uma situação de aplicação foi selecionado, à época do TTC, o texto de Henriques [5] que trata da utilização de autovalores e autovetores num problema de fluxo de potência, com o intuito de determinar áreas de controle de tensão. Essa análise ocorre em função do problema de controle da potência reativa em sistemas de potência, onde há necessidade de prever episódios que envolvam fenômenos de instabilidade de tensão. Dessa forma, são criados esquemas que possam controlar zonas de instabilidade em uma área. Por isso, ressalta Henriques [5], identificar áreas de controle de tensão é fundamental para este tipo de esquema, com o propósito de desenvolver uma metodologia para identificar essas áreas em sistemas de potências, através dos autovalores de uma matriz de sensibilidade, obtida a partir da matriz Jacobiana do fluxo de potência.

Na pesquisa é mencionado que os resultados obtidos através da metodologia proposta são comparados com os gerados pelo uso de uma análise de sensibilidade de tensão, realizada através da comparação das linhas da mesma matriz de sensibilidade utilizada na determinação das áreas a partir dos autovalores. O que justificou o empenho realizado, conforme Henriques [5], é o fato de que, nas últimas décadas, a importância de controlar a potência reativa cresceu de forma expressiva em função do aumento das ocorrências relacionadas a problemas de instabilidade de tensão nos Sistemas Elétricos de Potência de grande porte ao redor do mundo. Tais problemas decorrem de um uso mais intensivo do sistema de transmissão, tendo em vista questões como a resolução de custos e o crescimento expressivo da demanda por energia.

6. COMO FOI CONSTRUÍDO O MÉTODO DE CONTROLE

Considerando a escolha de uma barra cuja tensão representa e influencia o comportamento de uma determinada área do sistema sensível ao problema de instabilidade no sistema, e esta barra possa ter a sua tensão controlada, é possível constatar mesmo que ocorra uma contingência, que as tensões desta área sensível tenderão a retomar para seu valor aceitável. Para isso, a geração de potência reativa é utilizada de forma a conservar o perfil de tensão da área, o que resulta em um maior valor de margem de carregamento em relação ao ponto de colapso de tensão, aumentando-se, assim, a segurança operativa desta porção do sistema sob o enfoque da segurança de tensão.

Para melhor compreender, pode-se observar mais uma parte do trabalho onde é realizada uma análise sobre a origem deste procedimento: na década de oitenta, na França, uma arquitetura de controle de tensão, coordenado em três níveis baseado nos conceitos de divisão de áreas e barras-piloto, foi implementado. Foi, então, criado o chamado Controle Secundário de Tensão (CST), que regula o perfil de tensão de uma área do sistema através do controle da tensão de uma barra chave, denominada barra piloto. Os controles em uma determinada área devem ter pouca influência nos controles das áreas vizinhas e vice-versa. A premissa teórica do CST é que o controle de tensão é predominantemente um problema local. Após, é realizada uma divisão de áreas determinadas (Divisão) em um estudo de simulação da rede, é desenvolvido o controle para o CST e a divisão de áreas obtida é então mantida (Conquista).

A observação dos autovetores correspondentes ao menor autovalor da matriz reduzida QV destaca quais são as barras mais sensíveis ao colapso e, conseqüentemente, possíveis pontos para a instalação de equipamentos de suporte de potência reativa. Neste ponto se dá a instalação da barra piloto. Basicamente, “[...] o CCT possui três níveis hierárquicos, a saber: Controle Primário de Tensão (CPT), Controle Secundário de Tensão (CST) e Controle Terciário de Tensão (CTT). O CPT é mais rápido que o CST e o CST, por sua vez, é mais rápido que o CTT [...] [5, p. 24].

A estrutura do trabalho enfoca a ideia de que no CST a escolha da barra piloto deve ser realizada de forma criteriosa (seleção dos dados para elaboração dos autovalores, que levarão aos autovetores), dessa forma esta barra deve representar, consistentemente, o comportamento do perfil de tensão em seu contorno. Para Henriques [5], tal seleção não é trivial. Deve-se aliar aqui experiência profissional a um programa de “fluxo de potência ótimo”. Além disso, podem ser usadas funções, objetivo para minimização das perdas, melhor utilização de reservas de potência reativa disponíveis, minimização do número de chaveamento de bancos de capacitores e reatores, entre outros. Esta parte compõe a justificativa da forma pela qual foram selecionadas as variáveis para produção de dados que bem selecionem a barra piloto.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao pesquisar na história uma trajetória que identifique a forma pela qual determinado conhecimento foi utilizado pela humanidade, percebe-se o quanto a matemática está presente em questões que levam à elaboração de estratégias para resolução de questões nos mais variados ambientes. E, ainda, que esta matemática

aplicada pode ser percebida enquanto estratégia de ensino, com proveito para a sala de aula de Educação Básica.

Conforme relatos do trabalho, considerando a tese tida por base, a metodologia utilizou autovalores e autovetores para a determinação de áreas de controle de tensão. Tal metodologia consiste na decomposição em autovalores e vetores de uma matriz de sensibilidade, obtida através da redução de uma matriz Jacobiana. Deste uso decorre a explicitação da estratégia descrita como o Método de Dividir para Conquistar, onde é demonstrado que, ao controlar uma barra-piloto com característica semelhante ao sistema que controla o fluxo, é possível prever consideráveis falhas na distribuição de energia dentro de uma usina, por determinado tempo, evitando, assim, os problemas na rede de distribuição de determinada área.

O Método de Divisão e Conquista busca exatamente esta forma de resolução, ou seja, dividir o problema inicial, costumeiramente extenso, em pequenas proporções, para que os sistemas menores possam ter seus autovalores e autovetores observados, a fim de que se possa prever alguns acontecimentos e controlar seus efeitos.

Quanto ao uso da estratégia de uso do Jogo Torre de Hanói em sala de aula, é possível perceber que essa dinâmica possibilita o desenvolvimento de lógicas que podem ser transferidas para outras aprendizagens. Nisso nota-se a presença de uma grande tarefa que envolve a passagem dos discos para um dos pinos da Torre.

Para quem desconhece o jogo, a primeira ideia é de que tudo será resolvido rapidamente. No entanto, dada a condição imposta para a realização do jogo, é necessário que o jogador compreenda a lógica dos procedimentos e assim consiga realizar a recursividade sem perda de tempo, acarretada por algum passo errado que possa tornar a jogada anulada.

O jogador experiente em Hanói sabe que a lógica de troca de discos dos pinos depende de sua habilidade de registro das sequências das ações. É essa sequência que administrada, enquanto ocorre a troca de pinos, permitirá o estabelecimento de uma lógica interna de resoluções, e do processo de registro dessas apreensões advém a ideia de estratégia. Dividir, por sua vez, está atribuído aos procedimentos necessários para que a troca se efetue até o final, com êxito; já a conquista é o êxito obtido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BROLEZZI, A.C. **Epistemologia e História da Matemática: Anotações para uma História às Avessas**. Apresentação de Trabalho/Seminário, 2004. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/20070316.pdf>

- [2] CERESOLI, E. **O Método de Divisão e Conquista na Solução de Autossistemas de Matrizes Simétricas**. Dissertação (Matemática Aplicada), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.
- [3] FACHIN, M.P.G. **The Divide-and-Conquer Method**. Tese de Doutorado, University of Kent, Canterbury, Inglaterra, 1994.
- [4] FERREIRA, L.B.P.; NASCIMENTO, M.L. **Torre de Hanói: Um Recurso Pedagógico para a Educação Básica**, Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016.
- [5] HENRIQUES, R.M. **Utilização de Autovalores e Autovetores no Problema de Fluxo de Potência para Determinação das Áreas de Controle de Tensão**. Tese de Doutorado (Engenharia Elétrica), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2009.
- [6] JACOB, G. **René Descartes - Discurso do Método**. Tradução B. Prado Jr. Para bem conduzir a própria razão e procurar a verdade nas ciências. Disponível em: http://fortium.edu.br/blog/rogerio_basali/files/2010/03/Descartes_Discurso_do_Metodo_Tradicional12.pdf
- [7] MACHADO, N.J. **Matemática e Educação: Alegorias, Tecnologias e Temas Afins**. São Paulo: Cortez, 1992. (Coleção Questões da Nossa Época, n. 2)
- [8] PEREIRA, A.; RODRIGUES, R. O Problema das Torres de Hanoi: A Lenda, Algoritmos e Generalizações. **Gazeta de Matemática**, v. 1, n. 144, p. 10-11, 2003.
- [9] SILVA, A.; GURGEL, C.M.A. Questões de Interesse na História do Pensamento Cartesiano para a Educação Matemática Contemporânea. **Ciência & Educação (Bauru)**, v.11, n.3, p.513-522, 2005.
- [10] WATANABE, R. **Uma Lenda: Torre de Hanói. Explorando o Ensino da Matemática**, Volume II. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2004.

Referências dos trabalhos apresentados na Tabela 1

- OLIVEIRA, A.E. **Análise Combinatória: Aplicação de Técnicas Alternativas na Resolução de Problemas Interessantes**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil, 2017.
- SANTOS, M.S. **Algumas Variações do Jogo Torre de Hanói**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino, Universidade Estadual de Feira de Santana, Brasil, 2017.
- SILVA, F.D.M. **Aplicações do Princípio da Indução Matemática**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino, Universidade Federal do Cariri, Brasil, 2017.
- SILVA, J.A.L. **Uma Abordagem Selecionada de Sequências Recorrentes**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino, Universidade Estadual do Ceará, Brasil, 2017.